

University of Groningen

The discontinuous Hopf-transversal system and its geometric regularization

Liu, Xia

IMPORTANT NOTE: You are advised to consult the publisher's version (publisher's PDF) if you wish to cite from it. Please check the document version below.

Document Version

Final author's version (accepted by publisher, after peer review)

Publication date:
2013

[Link to publication in University of Groningen/UMCG research database](#)

Citation for published version (APA):

Liu, X. (2013). *The discontinuous Hopf-transversal system and its geometric regularization*. [S.n.].

Copyright

Other than for strictly personal use, it is not permitted to download or to forward/distribute the text or part of it without the consent of the author(s) and/or copyright holder(s), unless the work is under an open content license (like Creative Commons).

The publication may also be distributed here under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license. More information can be found on the University of Groningen website: <https://www.rug.nl/library/open-access/self-archiving-pure/taverne-amendment>.

Take-down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Downloaded from the University of Groningen/UMCG research database (Pure): <http://www.rug.nl/research/portal>. For technical reasons the number of authors shown on this cover page is limited to 10 maximum.

Summary

This thesis studies a particular class of planar Filippov systems, called Hopf-transversal (HT). A HT system is composed of two families of smooth planar vector fields that are separated by a smooth discontinuity boundary. The vector field on one side undergoes a Hopf bifurcation, while the vector field on the other side intersects the boundary transversally.

Our aim is to obtain a persistent HT system in the sense that the bifurcation set and the dynamics are structurally stable under a suitable equivalence relation. To this end we first study the bifurcations of a HT system, where we find that five families of codimension-1 bifurcations generically occur. The point where all these five bifurcations meet is called the boundary-Hopf-fold (BHF) bifurcation, which has codimension 3. The main contribution of this work is deriving the generic unfoldings of this BHF bifurcation, which turn out to be suitable HT families. When presenting the universal bifurcation sets we show that these fall apart into 8 open standard forms. Furthermore we prove that the generic BHF unfoldings are structurally stable in a sense of a certain form of contact equivalence, which amounts to diffeomorphic persistence of the bifurcation set and topological stability of the dynamics.

A promising line of research for Filippov systems is to relate the discontinuous dynamics to a regularized system, that is, to a smooth or continuous approximation of the original system. Then the dynamical properties of the Filippov system can be associated to corresponding properties of the regularized, in particular, slow-fast system for which the theory is better developed, cf. Dumortier and Roussarie [1, 2]. Regularization of discontinuous systems was pioneered by Sotomayor and Teixeira [3]. In our approach the Filippov system is approximated by a piecewise smooth, continuous dynamical system. The benefit of this approach is that invariant sets (equilibria and periodic orbits) for the Filippov system are ‘preserved’ by the regularization. Also the stability type is preserved in the case where the invariant set is hyperbolic. Moreover, we apply our regularization approach to the generic codimension-1 bifurcations of the planar Filippov system and then also to the HT system.

Samenvatting

In dit proefschrift bestuderen we Hopf-transversaal (HT) systemen, een klasse van vlakke Filippov systemen. Een HT systeem bestaat uit twee families van vlakke vectorvelden die van elkaar worden gescheiden door een gladde discontinuïteitsgrens. Aan een kant van deze grens ondergaat het vectorveld een (sub- of superkritische) Hopf bifurcatie terwijl het vectorveld aan de andere kant de grens transversaal snijdt.

Het doel is om een HT systeem te verkrijgen dat persistent is in de zin dat de bifurcatieverzameling en de dynamica structureel stabiel zijn onder een geschikte equivalentierelatie. We bestuderen daarom eerst de bifurcaties van een HT systeem. Het blijkt dat vijf families van codimensie-1 bifurcaties generiek kunnen voorkomen. Het punt waarin al deze bifurcaties samenkomen heet een grens-Hopf-zadelknoop (GHZ) bifurcatie en heeft codimensie 3. De belangrijkste bijdrage van dit proefschrift is de afleiding van generieke ontvouwingen van de GHZ bifurcatie, die juist geschikte HT families blijken te zijn. We tonen aan dat de universele bifurcatieverzamelingen uiteenvallen in 8 open standaardvormen. Bovendien bewijzen we dat de generieke GHZ ontvouwingen structureel stabiel zijn in een bepaalde zin van contactequivalentie hetgeen leidt tot diffeomorfe persistentie van de bifurcatieverzameling waarbij de dynamica topologisch stabiel is.

Veelbelovend onderzoek naar Filippov systemen richt zich op de relatie tussen de dynamica van het discontinue systeem en een regularisatie (d.w.z. een continue of gladde benadering) daarvan. De vraag is in welke mate de dynamische eigenschappen van het Filippov systeem gerelateerd zijn aan corresponderende eigenschappen van het geregulariseerde systeem. Van bijzonder belang zijn regularisaties door middel van systemen met snelle en langzame tijdschalen waarvoor de theorie reeds verder is ontwikkeld, cf. Dumortier en Roussarie [1, 2]. Regularisatie van discontinue systemen zijn voor het eerst bestudeerd door Sotomayor en Teixeira [3]. In dit proefschrift worden Filippov systemen benaderd door continue, stuksgewijs gladde dynamische systemen. Het voordeel van deze aanpak is dat invariante verzamelingen (evenwichten en periodieke banen) van het Filippov systeem worden ‘behouden’ door de regularisatie. Bovendien wordt, als de invariante verzameling hyperbolisch is, ook de stabiliteit behouden. We passen onze regularisatiemethode verder toe op generieke codimensie-1 bifurcaties van vlakke Filippov systemen en HT systemen.